

2023 年成人高等学校招生全国统一考试专升本

高等数学(二)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分。考试时间 150 分钟。

第 I 卷(选择题, 共 40 分)

一、选择题(1~10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2. 设函数 $f(x) = x^3 + 5 \sin x$, 则 $f'(0) = (\quad)$

- A. 5 B. 3 C. 1 D. 0

3. 设函数 $f(x) = \ln x - x$, 则 $f'(x) = (\quad)$

- A. x B. $x - 1$ C. $\frac{1}{x}$ D. $\frac{1}{x} - 1$

4. 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3$ 的单调递减区间是 $(\quad)$

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, +\infty)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 3)$

5. $\int x^{\frac{2}{3}} dx = (\quad)$

- A. $x^{\frac{2}{3}} + C$ B. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$ C. $x^{\frac{5}{3}} + C$ D. $x^{\frac{1}{3}} + C$

6. 设函数 $f(x) = |x|$, 则 $\int_{-1}^1 f(x) dx = (\quad)$

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

7. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且满足 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$, 则 $f(x) = (\quad)$

- A. e^x B. $e^x - 1$ C. $e^x + 1$ D. $x + 1$

8. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz = (\quad)$

- A. $e^{xy} dx + e^{xy} dy$ B. $e^x dx + e^y dy$ C. $ye^{xy} dx + xe^{xy} dy$ D. $e^y dx + e^x dy$

9. 设 $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

- A. $\frac{x}{2}$ B. 0 C. $\frac{y}{2}$ D. $x + y$

10. 投掷一枚均匀硬币 5 次, 其中恰有 3 次正面朝上的概率是 ()

- A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{16}$

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} =$ _____

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$ _____

13. 设函数 $f(x) = e^{2x}$, 则 $f^{(n)}(0) =$ _____

14. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 则 $x_0 =$ _____

15. 曲线 $y = xe^x$ 的拐点坐标为 _____

16. 曲线 $y = \frac{2x}{1+x^2}$ 的渐近线方程为 _____

17. $\int \frac{x}{x^2+4} dx =$ _____

18. 由曲线 $y = x^2, x = y^2$ 所围成的平面图形的面积为 _____

19. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx =$ _____

20. 函数 $z = x^2 + y^2 - x - y - xy$ 的驻点坐标为 _____

三、解答题(21~28 题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

22.(本题满分 8 分)

设 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 求 dy .

23.(本题满分 8 分)

计算 $\int x^2 \cos x dx$.

24.(本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$.

25.(本题满分 8 分)

盒中有 5 个球, 其中 3 个白球, 2 个黑球, 从中随机一次抽取 3 个球, 用 X 表示抽取到的白球的数.

(1) 求随机变量 X 的概率分布;

(2) 求 X 的数学期望 $E(X)$.

26.(本题满分 10 分)

要做一个容积 V 立方米的密闭圆柱形容器, 两底面材料的价格为每平方米 a 元, 侧面材料的价格为每平方米 b 元, 问圆柱形容器的底面半径与高的比等于多少时, 造价最低?

27.(本题满分 10 分)

证明：当 $x \geq 0$ 时， $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

28.(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$, n 为大于 1 的整数，求在条件 $x+y=c$ 下 $f(x,y)$ 的最小值，其中

$x > 0, y > 0, c$ 为正常数.

高等数学(二)

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$

2. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了导数的知识点.

【应试指导】可求得 $f'(x) = 3x^2 + 5 \cos x$, 则 $f'(0) = 5$

3. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了导数运算的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = (\ln x - x)' = \frac{1}{x} - 1.$

4. 【答案】D

【考情点拨】本题考查了单调区间的知识点.

【应试指导】由题可得 $f'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x - 3)$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 3$, 故单调减区间为 $(0, 3)$.

5. 【答案】B

【考情点拨】本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C.$

6. 【答案】C

【考情点拨】本题考查了定积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = -\frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1.$

7. 【答案】A

【考情点拨】本题考查了变上限积分的性质的知识点.

【应试指导】 $\int_0^x f(t) dt = e^x - 1$ 两边同时求导, 得 $f(x) = (e^x - 1)' = e^x.$

8. 【答案】C

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = de^{xy} = e^{xy} d(xy) = e^{xy} (ydx + xdy)$.

9. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x$, 所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

10. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了独立重复试验的概率的知识点.

【应试指导】 恰有 3 次正面朝上的概率为 $C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$.

二、填空题

11. 【答案】 $\frac{1}{4}$

【考前点拨】 本题考查了函数极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x}+2} = \frac{1}{4}$.

12. 【答案】 e^2

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2$.

13. 【答案】 2^n

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 因为 $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, 故 $f^{(n)}(0) = 2^n$.

14. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【考情点拨】 本题考查了导数的几何意义的知识点.

【应试指导】 $f'(x) = 2x - 2$, 故 $f'(x_0) = 2x_0 - 2$, 由于切线与直线 $y = x - 1$ 平行, 故 $f'(x_0) = 1$,
得 $x_0 = \frac{3}{2}$

15. 【答案】 $(-2, -2e^{-2})$

【考情点拨】 本题考查了拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = (1+x)e^x$, $y'' = (2+x)e^x$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = -2$. 当 $x < -2$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > -2$ 时, $y'' > 0$. 故拐点为 $(-2, -2e^{-2})$.

16. 【答案】 $y = 0$

【考情点拨】 本题考查了渐近线的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, 故曲线有水平渐近线 $y = 0$.

17. 【答案】 $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 4} d(x^2 + 4) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$.

18. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了平面图形面积的知识点.

【应试指导】 该平面图形面积为 $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

19. 【答案】 $\frac{1}{2}$

【考情点拨】 本题考查了反常积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} (\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} - 1) = \frac{1}{2}$

20. 【答案】 $(1, 1)$

【考情点拨】 本题考查了驻点的知识点.

【应试指导】 由定义, 令 $\begin{cases} z_x = 2x - 1 - y = 0 \\ z_y = 2y - 1 - x = 0 \end{cases}$, 解得 $x = 1, y = 1$, 故所求驻点为 $(1, 1)$.

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 22. y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\text{所以 } dy = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\begin{aligned} 23. \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 d \sin x \\ &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= x^2 \sin x + 2(x \cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) \\ &= -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

25. (1) X 的可能取值为 1, 2, 3.

$$P\{X=1\} = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X=2\} = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5};$$

$$P\{X=3\} = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

故 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

$$(2) E(X) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6 + 3 \times 0.1 = 1.8$$

26. 设底面半径和高分别为 r, h , 则造价函数 $L = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh$, 且 $\pi r^2 h = V$.

将 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入 L 中, 得 $L = 2a\pi r^2 + \frac{2bV}{r}$.

令 $L' = 4a\pi r - \frac{2bV}{r^2} = 0$, 得 $2a\pi r^3 = bV$,

则有 $2a\pi r^3 = b\pi r^2 h$, 即 $2ar = bh$, 解得 $\frac{r}{h} = \frac{b}{2a}$

由实际问题的意义知, 当底面半径与高的比为 $\frac{b}{2a}$ 时, 造价最低.

27. 令 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$. 因此, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 为单调增函数.

故有 $f(x) \geq f(0) = 0$. 故当 $x \geq 0$ 时, $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$

28. 令 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x + y - c)$,

则
$$\begin{cases} L_x = \frac{1}{2}nx^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_y = \frac{1}{2}ny^{n-1} + \lambda = 0, \\ L_\lambda = x + y - c = 0, \end{cases}$$
 解得 $x = y = \frac{c}{2}$

由实际问题的意义知当 $x = y = \frac{c}{2}$ 时, $f(x, y)$ 取得最小值 $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{2} \right)^n + \left(\frac{c}{2} \right)^n \right] = \left(\frac{c}{2} \right)^n$